

# Der Gödelsche Gottesbeweis

Günther J. Wirsching  
Mathematisch-Geographische Fakultät  
Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt

19. Juli 2012

Skript zu einem am 10. Juli 2012 in Eichstätt gehaltenen Vortrag.

## Der Gödelsche Gottesbeweis

Kurt Gödel war ein ziemlich bekannter Mathematiker des vergangenen Jahrhunderts, und er hat sich in der zweiten Hälfte seines Lebens immer wieder mit der logischen Struktur des ontologischen Gottesbeweises befasst.

Schau'n wir mal, was er so getrieben hat!

## Gödels Notizen [Transkription von Sobel 1987]

Feb 10, 1970

### Ontologischer Beweis

- $P(\varphi)$   $\varphi$  is positive (e  $\varphi \in P$ )
- Ax 1  $P(\varphi).P(\psi) \supset P(\varphi.\psi)^\otimes$  Ax 2  $P(\varphi) \vee^\times P(\sim\varphi)$
- Df 1  $G(x) \equiv (\varphi)[P(\varphi) \supset \varphi(x)]$  (God)
- Df 2  $\varphi \text{ Ess. } x \equiv (\psi)[\psi(x) \supset N(y)[\varphi(y) \supset \psi(y)]]$  (Essence of  $x$ )<sup>•</sup>
- $p \supset_N q = N(p \supset q)$  Necessity
- Ax 2  $\begin{cases} P(\varphi) \supset N P(\varphi) \\ \sim P(\varphi) \supset N \sim P(\varphi) \end{cases}$  because it follows from the nature of the property
- Th  $G(x) \supset G \text{ Ess. } x$
- Df  $E(x) \equiv (\varphi)[\varphi \text{ Ess. } x \supset N(\exists x)\varphi(x)]$  necessary Existence
- Ax 3  $P(E)$
- Th  $G(x) \supset N(\exists y)G(y)$
- hence  $(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$   
"  $M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y)$   $M =$  possibility  
"  $\supset N(\exists y)G(y)$

$M(\exists x)G(x)$  means the system of all positive properties is compatible. This is true because of:

Ax 4:  $P(\varphi).\varphi \supset_N \psi : \supset P(\psi)$ , which implies

$$\begin{cases} x = x & \text{is positive} \\ x \neq x & \text{is negative} \end{cases}$$

<sup>•</sup>and for any number of summands

<sup>•</sup>exclusive or

<sup>•</sup>any two essences of  $x$  are nec. equivalent

## Gödels Notizen – 1

Es handelt sich hier um eine Transkription Gödelscher Notizen zum „ontologischen Beweis“, die der Philosoph Jordan Howard Sobel im Jahre 1987 angefertigt und im Anhang zu einer Analyse des Gödelschen Gottesbeweises publiziert hat [8].

Wir sehen hier zunächst eine Datumsangabe im amerikanischen Format, und dann eine deutschsprachige Überschrift „Ontologischer Beweis“. Die Notizen selbst sind auf englisch, vermutlich weil Gödel es als Grundlage zur Diskussion des Beweises mit seinen amerikanischen Kollegen aufgeschrieben hat.

Gödels Formelsprache stammt aus dem groß angelegten Werk *Principia Mathematica* von Whitehead und Russell [9], und ist im Prinzip verständlich: Das Hufeisensymbol bezeichnet die *materiale Implikation* der Aussagenlogik, mögliche Versprachlichungen wären „impliziert“ oder „schließt ein“. Das logische Und, die *Konjunktion*, wird mit einem Punkt bezeichnet, und das  $\vee$  meint die *Disjunktion*, das logische (nicht-exklusive) Oder.

In der ersten Zeile wird eine Bezeichnung  $P$  für *positiv* eingeführt, die anscheinend auf *Eigenschaften* oder *Prädikate*  $\varphi$  anwendbar sein soll. Das „e“ steht vielleicht für „est“; möglicherweise ist es nicht richtig transkribiert und soll „or“ heißen. *Positiv* wird nicht näher erklärt – wir werden sehen, dass dies einen guten Grund hat.

Das erste Axiom sagt also: die logische Konjunktion zweier positiver Eigenschaften ist wieder positiv. Die Fußnoten sind ebenfalls von Gödel, ebenso wie die Fußnotenmarkierungen. Gödel sagt in der ersten Fußnote, dass Ax 1 für eine beliebige Anzahl positiver Eigenschaften gelten soll; wir werden sehen, dass Gödel tatsächlich ein etwas stärkeres Axiom als dieses benutzt.

Ax 2 sagt aus, dass eine Eigenschaft entweder selbst *positiv* ist, oder ihre Verneinung – in der Fußnote vermerkt Gödel, dass dies hier im Gegensatz zur üblichen Verwendung des Zeichens  $\vee$  ein

exklusives Oder sein soll, dass eine Eigenschaft also nicht zugleich mit ihrer Verneinung positiv sein kann.

Gemäß der ersten Definition, Df 1, soll ein Wesen das Prädikat *göttlich* erhalten, wenn es alle *positiven* Eigenschaften hat. Die zweite Definition, Df 2, soll den Begriff *wesentliche Eigenschaft* oder *Essenz* erklären; in der zugehörigen Fußnote wird vermerkt, dass eine wesentliche Eigenschaft bis auf Äquivalenz eindeutig festgelegt ist – Sobel hat in seiner Analyse festgestellt, dass die Definition leicht verändert werden muss, um die Fußnote zu rechtfertigen; anhand anderer Aufzeichnungen von Gödel konnte Sobel diese Korrektur durchführen.

Das Wort „Necessity“ in der nächsten Zeile deutet darauf hin, dass wir Modallogik benötigen.

Dass hier „Ax 2“ zweimal vorkommt, geht ebenfalls auf Gödel zurück: er hat sich anscheinend einfach verzählt. Das Axiom bedeutet, dass eine *positive* Eigenschaft in modallogischem Sinn *notwendigerweise positiv* sein soll – und das sei in der Natur von *positiv* begründet.

## Gödels Notizen – 2

Die zweite Folie mit Gödelschen Notizen beginnt mit einer Behauptung, einem *Theorem*: Wenn ein Wesen *göttlich* ist, dann ist die *Göttlichkeit* die wesentliche Eigenschaft dieses Wesens. Ein Beweis des Theorems fehlt hier, kann aber leicht angegeben werden. Dazu später mehr.

Es kommt noch eine Definition für ein modallogisches Prädikat *notwendige Existenz*, und Ax 3 sagt aus, dass *notwendige Existenz* eine *positive* Eigenschaft sein soll.

Damit wird dann geschlossen, dass aus der *möglichen Existenz* eines göttlichen Wesens auch seine *notwendige Existenz* folgt.

Die Möglichkeit der Existenz eines göttlichen Wesens ergibt sich

nun aus einem weiteren, zunächst etwas schwer verständlichen Axiom, Ax 4.

Bevor ich tiefer in die Analyse des *ontologischen Beweises* einsteige, möchte ich ein paar Worte zum Kontext sagen.

## Kurt Gödel & sein Gottesbeweis

Zunächst zum biographischen Kontext.

Kurt Gödel stammt aus einer großbürgerlichen Familie und wurde am 28. April 1906 in Brünn geboren. Brünn liegt ca. 100 km nördlich von Wien und gehörte damals Österreich-Ungarn, heute heißt die Stadt Brno und liegt in Tschechien.

Gödel ging im Herbst 1924 nach Wien, um theoretische Physik zu studieren, entschied sich aber nach dem Hören von Philosophie-Vorlesungen bei Heinrich Gomperz und zahlentheoretischen Vorlesungen bei Philipp Furtwängler dafür, sich intensiver mit der Mathematik und ihren Grundlagen zu befassen [5, S. 23f.].

Gödel wurde 1930 aufgrund einer Dissertation mit dem Titel

Über die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls

an der Universität Wien promoviert. Schon im darauffolgenden Jahr wurde seine wichtigste Arbeit publiziert, nämlich einen Aufsatz mit dem Titel

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I,

den er dann an der Universität Wien zur Erlangung einer Dozentur einreichte.

Am 20. September 1938 heiratete Kurt Gödel Adele Porkert [3].

Der Versuch, im Jahre 1939 von Wien in die USA auszureisen, gestaltete sich schwierig – hauptsächlich deswegen, weil Kurt Gödel politische Ereignisse weitgehend ignorierte. Mit Hilfe von bereits in Amerika lebenden Freunden und seiner Frau gelang es schließlich, die erforderlichen Visa zu erhalten, und die Gödels konnten am 15. Januar 1940 via Moskau, die transsibirische Eisenbahn, und Yokohama, nach San Francisco gelangen, wo sie am 4. März 1940 ankoamen. Die Weiterreise nach Princeton erfolgte dann ohne weitere Schwierigkeiten per Bahn.

Aus dem Jahr 1941 datieren die ersten Aufzeichnungen zum ontologischen Beweis, die mehrfach weiterentwickelt wurden.

Krankheit: Seit den 1930er Jahren litt Gödel unter psychischen Problemen. In Biographien häufig genannt sind Depressionen, Hypochondrie, und Paranoia, insbesondere die Angst vor vergiftetem Essen. Wegen dieser Probleme musste Gödel 1960 seine Lehrtätigkeit aufgeben. 1970 unternahm er einen letzten Publikationsversuch, der daran scheiterte, dass Gödel wegen der Wirkung von Psychopharmaka mehrere Fehler übersehen hatte.

Am 10. Februar 1970 telefonierte Gödel mit seinem Freund Oscar Morgenstern, dem Wirtschaftswissenschaftler (dem mit der Spieltheorie). Er habe Angst, bald zu sterben, und ggf. solle Morgenstern sieben Arbeiten, die fast fertig seien, posthum zur Publikation einreichen – darunter die Notizen mit dem *ontologischen Beweis* [3].

Diese Notizen diskutierte Gödel noch am gleichen Tag mit Dana Scott, der wegen seiner Leistungen zur Syntax und Semantik von Programmiersprachen ein wichtiger Pionier der Informatik wurde.

Wegen seiner Angst vor vergiftetem Essen konnte Gödel im Prinzip nur das essen, was seine Frau ihm gab. 1977 erlitt Adele jedoch einen Bandscheibenvorfall, der sie für längere Zeit ins Krankenhaus brachte. Als sie nach Hause kam, wog Kurt Gödel

nur noch 40 Kilogramm – sie brachte ihn sofort ins Krankenhaus, aber die konnten ihn nicht mehr retten, sodass er einige Wochen später, am 14. Januar 1978, an Unterernährung starb.

Gödels „ontologischer Beweis“ wurde erstmalig 1987 von Jordan Howard Sobel zusammen mit einer Analyse veröffentlicht.

## Literatur

(Evtl. diesen Abschnitt weglassen.)

Letztes Jahr ist ein umfangreiches Suhrkamp-Taschenbuch zum Thema erschienen: „Gottesbeweise von Anselm bis Gödel“ – Anselm von Canterbury und Kurt Gödel liegen fast tausend Jahre auseinander. Zur Analyse des Gödelschen Gottesbeweises habe ich zwei philosophische Aufsätze zu dem Thema herangezogen: den bereits erwähnten von Sobel, und noch einen jüngeren Datums von André Fuhrmann, der zur Zeit in Frankfurt Philosophie lehrt.

## Der ontologische Gottesbeweis

Ich komme zum philosophischen Kontext.

Das ontologische Argument ist ziemlich alt; als Quelle habe ich hier den islamischen Gelehrten Ibn Sina, latinisiert Avicenna, ausgewählt, der vor allem Texte zur Medizin in arabischer Sprache verfasst hat. Natürlich braucht man zur Abrundung der Heilkunst auch eine Metaphysik.

Avicenna hat auf arabisch geschrieben; vor ein paar Jahren ist ein englisch-arabischer Paralleltext seiner *Metaphysik* erschienen [1] – und darin findet sich die folgende Behauptung, die ich hier in deutscher Übersetzung nach Wikipedia zitiere:

Gott ist das einzige Sein, bei dem Essenz (Wesen) und Existenz (Dasein) nicht zu trennen sind und das daher notwendig an sich ist. [10]

Der Satz ist an dieser Stelle noch schwer verständlich. Ich habe ihn ausgewählt, weil er in gewisser Weise auch den Kern des Gödelschen Beweises ausdrückt, wie wir sehen werden.

Der ontologische Beweis wurde von zahlreichen Philosophen aufgegriffen, formuliert, und mit Argumentationsketten angereichert. Im christlichen Kontext formulierte Anselm von Canterbury (um 1033 bis 1109) in seinem *Proslogion* eine Version als mögliche Antwort auf die Zweifel eines „Toren“ [2]. René Déscartes brachte später in seinen *Meditationes* das ontologische Argument nochmal auf den Punkt.

Leibniz hat Wesentliches zur Formalisierung der Logik geleistet, und insbesondere auch die von Gödel benutzte Modallogik auf eine philosophische Grundlage gestellt.

Erwähnenswert ist noch der Agnostiker Bertrand Russell, weil er in seiner Autobiographie schreibt, dass er unter dem Einfluss seines damaligen Freundes McTaggart für zwei oder drei Jahre Hegelianer geworden ist, und sich genau an den Moment erinnere, als er Hegelianer wurde. Diese geschah, während er in Cambridge die Trinity Lane entlang spazierte, und in einem Augenblick plötzlicher Klarheit ausrief [7, p. 63]:

Great God in boots!—the ontological argument is sound!

Von Leibniz stammt der entscheidende philosophische Ausgangspunkt der Gödelschen Überlegungen, nämlich, dass es genüge, die (modallogische) Möglichkeit der Existenz eines göttlichen Wesens zu beweisen, weil daraus schon seine notwendige Existenz folge [2].

Schließlich sei noch Adorno erwähnt, der an mehreren Stellen

seines Werkes in unterschiedlichen Formulierungen schrieb (zitiert nach dem Umschlagtext von [2]):

Wohl eine jede Philosophie kreist um den ontologischen Beweis.

## Psychologischer Kontext

Noch etwas zum psychologischen Kontext von Gottesvorstellungen. Der sozusagen „normale“ Zugang zu Gott ist der phänomenisch-offenbarungstheologische: Das Wirken Gottes wird entweder *direkt erlebt*, wie zum Beispiel von Mystikern, oder es wird aus einer Erzählung oder Beschreibung offenbar. Erforderlich ist hier in jedem Fall Vertrauen in die Zuverlässigkeit der Quellen – hier habe ich mit Absicht das Wort „Vertrauen“ gewählt, weil die Bedeutung des Wortes „Glauben“ in der Theologie näher am umgangssprachlichen „Vertrauen“ liegt als am umgangssprachlichen „Glauben heißt nicht wissen“.

Der „Gott der Philosophen“ hat einen völlig anderen Charakter: Er beruht auf einem *logischen Wahrheitsempfinden*, welches zwar formalisierbar und daher sehr zuverlässig ist, aber eben auch gnadenlos relativ: *Wenn* die Voraussetzungen wahr sind, *dann* folgt auch die Wahrheit der Folgerungen.

## Prädikatenlogik

Die Sprache, in der der Gödelsche Gottesbeweis formuliert ist, ist die Prädikatenlogik.

## Syntax

Die Syntax der Prädikatenlogik besteht aus mehreren Arten von Bezeichnern und aus Formeln, die mit Hilfe eines *Kalküls* miteinander in Beziehung gesetzt werden. Man unterscheidet Bezeichner für:

- Individuen (fest und variabel),
- Eigenschaften (Prädikate; ebenfalls fest und variabel),
- Junktoren: Und  $\wedge$ , einschließendes Oder  $\vee$ , materiale Implikation  $\rightarrow$ , Negation  $\neg$ ,
- Klammern.

Eine *Formel* oder *Aussage* ist eine Kette von Bezeichnern, denen eine *Wahrheitswert* zugeordnet ist. Z. B. ist für eine Eigenschaft *F* und ein Individuum *a* die Formel *Fa* genau dann wahr, wenn das Individuum *a* die Eigenschaft *F* besitzt.

Hinzu kommt ein *Kalkül* bestehend aus *Schlussregeln* zur Ableitung von Formeln aus vorausgesetzten Formeln. Exemplarisch habe ich hier ausgewählt:

- Rechenregeln zum Umformen einer Formel in eine äquivalente Formel,
- den *modus ponendo ponens*, auf deutsch etwas „Schlussfigur, die durch das Setzen einer Aussage eine andere Aussage setzt“, abgekürzt einfach *modus ponens*,
- die Schlussfigur *ex falso quodlibet*.

## Semantik

Um zur Semantik oder Bedeutung einer Formelmenge zu kommen, müssen die einzelnen Bezeichner interpretiert werden: die

Konstanten, die Prädikate, die Formeln. Dies geschieht entweder in natürlicher Sprache, oder in der Sprache der Mengenlehre.

Ein Beispiel ist die *Zwei-Affen-Welt*: es gibt darin zwei Individuen, zwei *Affen*, und das Prädikat *fein gekleidet*. In diesem Beispiel ist der Affe *a* fein gekleidet, der Affe *b* aber nicht.

## Fragen der Vollständigkeit

Gödel hat in seinem wissenschaftlichen Werk das Thema „logische Vollständigkeit“ öfter behandelt. In seiner Dissertation bewies er den folgenden Vollständigkeitssatz:

**Satz.** Es gibt einen Kalkül der Prädikatenlogik erster Stufe mit der Eigenschaft, dass Ableitbarkeit einer Formel im Kalkül zur Gültigkeit der Interpretation dieser Formel in jedem Modell äquivalent ist.

Einen etwas anderen Charakter haben die *Gödelschen Unvollständigkeitssätze*, die sein bedeutendsten Resultate sind. Der erste Unvollständigkeitssatz lautet:

**Satz 1.** Jede zahlttheoretisch hinreichend mächtige Menge von Aussagen ist entweder unvollständig oder widersprüchlich.

Um einen mathematischen Satz inhaltlich zu verstehen, ist es in der Regel erforderlich, auch eine Idee vom Beweis des Satzes zu haben. Gödel benötigt hier die zahlttheoretische Mächtigkeit des Kalküls, um die möglichen Formeln „aufzählen“ zu können, und dieses „Aufzählen“ ermöglicht den Nachweis der Existenz *selbstbezüglicher* Formeln wie etwa

„Ich bin im Kalkül nicht ableitbar“.

Eine solche Formal ist dann „wahr“, aber eben im Kalkül nicht ableitbar. – Heute nennt man das „Aufzählen“ möglicher Formeln *Gödelisieren*.

Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz ist bei Gödel eine Folgerung des ersten:

**Satz 2.** In keiner zahlttheoretisch hinreichend mächtigen Menge von Aussagen ist ihre eigene Widerspruchsfreiheit ableitbar.

## Prädikatenlogik 1. vs. 2. Stufe

Der Unterschied zwischen der Prädikatenlogik der ersten und der zweiten Stufe besteht darin, auf welche Art von Bezeichnern Existenz- und Allquantor angewendet werden dürfen. In der Prädikatenlogik erster Stufe darf man die Quantoren nur auf einfache Individuenbezeichner anwenden, d.h., durch einen Quantor werden eine oder mehrere Leerstellen von Prädikaten „gebunden“.

In der Prädikatenlogik höherer Stufe ist auch die Möglichkeit des Quantifizierens über Prädikate vorgesehen, das heißt, es sind einfach noch mehr Kombinationen der Bezeichner als Formeln zugelassen.

Gödel benutzt diese erweiterte Möglichkeit in seinem Gottesbeweis schon bei der Definition der *Göttlichkeit* eines Wesens: hier fordert er für alle möglichen Prädikate, dass, wenn ein Prädikat *positiv* ist, dass es dann auf das göttliche Wesen zutreffen muss.

## Modallogik

Die Modallogik in der hier präsentierten Form geht im Wesentlichen auf Leibniz zurück. Er unterscheidet drei *Modalitäten*:

**faktisch:** wahr in der aktuellen Welt,

**möglich:** wahr in wenigstens einer denkbaren Welt,

**notwendig:** wahr in allen denkbaren Welten.

Sehr verbreitet, insbesondere in der Informatik, ist die folgende Zeichenschrift: sei  $\varphi$  eine Formel. Dann bedeuten:

$\varphi$ : die Formel  $\varphi$  ist in der aktuellen Welt wahr,

$\Diamond\varphi$ : es ist möglich, dass  $\varphi$  wahr ist,

$\Box\varphi$ : es ist notwendig, dass  $\varphi$  wahr ist.

Für diese Formeln gibt es ein paar einfach einzusehende Rechenregeln:

$$\begin{array}{lcl} \Box\neg\varphi & \iff & \neg\Diamond\varphi \\ \Diamond\neg\varphi & \iff & \neg\Box\varphi \end{array}$$

## Denkbare Zwei-Affen-Welten

Ein Beispiel soll die Anwendung der Modallogik illustrieren: Hierzu erweitern wir die Affenwelt um einen weiteren Affen, sodass vier *mögliche Welten* entstehen: in Welt 1 ist  $a$  fein gekleidet und  $b$  nicht, in Welt 2 ist das umgekehrt, in Welt 3 sind beide Affen fein gekleidet, und in Welt 4 keiner der beiden.

Unten auf der Folie sind noch einige wahre modallogische Aussagen notiert:

$\Diamond\neg Fa$ : „Es ist möglich, dass der Affe  $a$  nicht fein gekleidet ist.“

$\Diamond(Fa \vee Fb)$ : „Es ist möglich, dass sowohl Affe  $a$  als auch Affe  $b$  fein gekleidet ist.“

$\Box\neg(Fa \wedge \neg Fa)$ : „Es kann nicht sein, dass der Affe  $a$  sowohl fein gekleidet als auch nicht fein gekleidet ist.“

## Aufbau der Formelmenge zum „ontologischen Beweis“

Die Formelmenge für den ontologischen Gottesbeweis von Kurt Gödel besteht aus drei Definitionen und fünf Axiomen:

Df 1  $Gx \equiv \forall\varphi (P\varphi \rightarrow \varphi x)$

(Ein *göttliches Wesen* ist in jeder Hinsicht perfekt, es hat alle Perfectiven.)

Df 2  $\varphi \text{ Ess. } x \equiv \varphi x \wedge \forall\psi (\psi x \rightarrow \Box\forall y (\varphi y \rightarrow \psi y))$

(Eine Eigenschaft  $\varphi$  ist *wesentlich* für ein Wesen  $x$ , wenn  $x$  sie besitzt und jede (andere) Eigenschaft von  $x$  notwendigerweise von  $x$  impliziert wird. Diese Definition impliziert, dass alle wesentlichen Eigenschaften eines Wesens notwendigerweise logisch äquivalent sind, wie in Gödels Fußnote vermerkt.)

Df 3  $Ex \equiv \forall\varphi (\varphi \text{ Ess. } x \rightarrow \Box\exists y \varphi y)$

(Ein Wesen  $x$  existiert *notwendigerweise*, wenn die wesentliche Eigenschaft von  $x$  in jeder denkbaren Welt realisiert („inkarniert“) ist.)

Ax 1  $P\varphi \wedge P\psi \rightarrow P(\varphi \wedge \psi)$

(Perfectiven sind miteinander verträglich.)

Ax 2  $(P\varphi \wedge \neg P\neg\varphi) \vee (P\neg\varphi \wedge \neg P\varphi)$

(Eine beliebige Eigenschaft ist entweder selbst eine Perfective oder ihre Verneinung. Gegen dieses Axiom könnte der Einwand erhoben werden [4], dass es ja auch *neutrale* Eigenschaften geben könne, die weder *positiv* noch *negativ* seien, wie z. B. die Eigenschaft „rothaarig sein“. Das Wort *Perfective* legt jedoch eine andere Interpretation nahe: Bei einer *kontingenten* Eigenschaft wie z. B.

„rothaarig sein“ ist es eine Perfective, diese Eigenschaft *nicht* zu haben – ein göttliches Wesen hat keine kontingenten Eigenschaften.)

Ax 3  $(P\varphi \rightarrow \Box P\varphi) \wedge (\neg P\varphi \rightarrow \Box \neg P\varphi)$   
(Perfectiven sind notwendigerweise solche.)

Ax 4  $PE$   
(Notwendige Existenz ist eine Perfective.)

Ax 5  $(P\varphi \wedge \Box(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow P\psi$   
(Was eine Perfective notwendigerweise einschließt, ist ebenfalls eine Perfective.)

Diese Axiomatik stellt auch eine implizite Definition des Prädikaten-Prädikats  $P$  dar. Gödel verwendet damit einen Trick, den er von der Axiomatisierung der Mengenlehre her kennt: Weil Versuche, den Begriff *Menge* explizit zu definieren, zu *Antinomien der Mengenlehre* geführt haben, definiert man heute den Begriff *Menge* einfach implizit durch ein Axiomensystem, was den möglichen Gebrauch dieses Begriffs regelt ohne auf eine genaue „Bedeutung“ einzugehen.

## Denkbare Affen-Welten mit Gott

Gödels Axiomatik hat auch ein Modell: Fügt man zur Affen-Welt ein *göttliches Wesen*  $g$  hinzu, bezeichnet eine Eigenschaft einfach als „Perfective“, wenn  $g$  sie hat, und fordert, dass dieses  $g$  eine Eigenschaft entweder in allen denkbaren Welten hat oder in keiner, dann erfüllt dieses Modell alle Gödelschen Axiome [4]. (Die Struktur dieses Modells findet sich bei Fuhrmann, die Interpretation von  $a$  als „Affe“ und  $F$  als „fein gekleidet“ ist meine Zutat.)

## Gödels erstes Th

(Nur das Theorem formulieren und den Beweis überspringen.)

**Theorem 1**  $Gx \rightarrow G \text{ Ess. } x$

„Wenn  $x$  ein göttliches Wesen ist, dann ist *Göttlichkeit* die wesentliche Eigenschaft von  $x$ .“

### Beweis.

(B1)	$\psi x$	[zeige: $\forall\psi (\psi x \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow \psi y))$ ]
(A1)	· $\neg P\psi$	[angenommen, $\psi$ wäre nicht positiv]
(F1)	· $P \neg \psi$	[nach Ax 2]
	· $Gx \rightarrow (P \neg \psi \rightarrow \neg \psi x)$	[nach Df 1 & Spezialisierung]
	· $P \neg \psi \rightarrow \neg \psi x$	[ $Gx$ & modus ponens]
(F2)	· $\neg \psi x$	[ $(F1)$ & modus ponens]
	$P\psi$	[ $(A1)$ falsch, da $(B1) \nleftrightarrow (F2)$ ]
(B2)	$\Box P\psi$	[nach Ax 3 & modus ponens]
	$P\psi \rightarrow \forall y (Gy \rightarrow \psi y)$	[nach Df 1]
	$\Box P\psi \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow \psi y)$	[Modallogik]
	$\Box \forall y (Gy \rightarrow \psi y)$	[ $(B2)$ & modus ponens]

## Zur Aussage von Leibniz

In der Gödelschen Axiomatik lässt sich die Aussage von Leibniz beweisen, in der Leibniz die Frage nach der notwendigen Existenz eines göttlichen Wesen auf die Frage nach dessen Möglichkeit reduziert.

**Theorem 2**  $\Diamond \exists x Gx \rightarrow \Box \exists y Gy$

„Wenn es möglich ist, dass ein göttliches Wesen existiert, dann ist dessen Existenz notwendig.“

**Beweis.**

	$\Diamond \exists x Gx$	[Annahme]
(V1)	· $Gx$	[zur Vereinfachung]
	· $\forall \varphi (P\varphi \rightarrow \varphi x)$	[nach Df 1]
	· $PE \rightarrow Ex$	[einsetzen: $E$ statt $\varphi$ ]
	· $Ex$	[Ax 4 & modus ponens]
	· $\forall \varphi (\varphi \text{ Ess. } x \rightarrow \Box \exists y \varphi y)$	[nach Df 3]
(F1)	· $G \text{ Ess. } x \rightarrow \Box \exists y Gy$	[einsetzen: $G$ statt $\varphi$ ]
	· $Gx \rightarrow G \text{ Ess. } x$	[Th 1]
	· $G \text{ Ess. } x$	[(V1) & modus ponens]
	· $\Box \exists y Gy$	[(F1) & modus ponens]
	$\Diamond \exists x Gx \rightarrow \Box \exists y Gy$	[Zusammenfassung]

**Gödels Möglichkeitsbeweis****Theorem 3**  $\Diamond \exists x Gx$ 

„Es ist möglich, dass ein göttliches Wesen existiert.“

**Beweis.**

(E1)	$PG$	[nach Df 1 und Ax 1 (*)]
(A1)	· $\neg \Diamond \exists x Gx$	[angenommen, $\exists x Gx$ ist unmöglich]
	· $\Box \neg \exists x Gx$	[modallogische Rechenregel]
(E2)	· $\Box \forall x \neg Gx$	[Quantorenrechenregel]
(E3)	· $\Box \forall x (Gx \rightarrow x = x)$	[(E2) & ex falso quodlibet]
(F1)	· $P(x = x)$	[(E1) & (E3) & Ax 5 & mod. pon.]
(E4)	· $\Box \forall x (Gx \rightarrow x \neq x)$	[(E2) & ex falso quodlibet]
(F2)	· $P(x \neq x)$	[(E1) & (E4) & Ax 5 & mod. pon.]
	$\Diamond \exists x Gx$	[wegen (F1) $\not\leftrightarrow$ (F2) ist (A1) falsch]

**Was hat Gödel bewiesen?**

Gödel benutzt in seinem Nachlass in deutschen Texten anstelle des englischen Adjektivs *positive* häufig das Wort *Perfective*.

Eine weitere Erläuterung, was mit *positiv* gemeint sein könnte, findet sich im weiteren Verlauf der Sobelschen Transkription der Gödelschen Notizen [8]:

“Positive means positive in the moral aesthetic sense (independently of the accidental structure of the world).  
Only the ax. are true. . .”

Gödel meint vermutlich, er habe durch seine implizite axiomatische Definition das eingefangen, was man als „positiv im moralisch-ästhetischen Sinn“ bezeichnen könnte.

**Der Kern des Bewiesenen**

Unter Verwendung des Wortes *Perfective* kann man wesentliche Ergebnisse der Gödelschen axiomatischen Theologie so zusammenfassen:

Wenn die Perfectiven miteinander verträglich sind,  
und notwendige Existenz eine Perfective ist,  
dann existiert notwendigerweise ein göttliches Wesen.

**Assoziation zur Aussage von Ibn Sina**

Dies passt nun gut zur bereits zitierten Aussage von Ibn Sina:

Gott ist das einzige Sein, bei dem Essenz (Wesen) und Existenz (Dasein) nicht zu trennen sind und das daher notwendig an sich ist. [10]

## Was bedeutet der Beweis?

Insgesamt möchte ich vier Stellen anmerken, an denen der Gödel'sche Gottesbeweis eine Lücke hat – eine Lücke ist nicht unbedingt ein Fehler, und es mag durchaus sein, dass die eine oder andere Lücke nicht so schwer zu schließen ist. Aber jedenfalls sind es Stellen, an denen Gödels Argumentation unvollständig ist.

1. Die erste – möglicherweise gut schließbare – Lücke befindet sich auf der logischen Ebene: Gödel benötigt Prädikatenlogik der zweiten Stufe; wir befinden uns also nicht im sicheren Bereich der Prädikatenlogik erster Stufe, deren modelltheoretische Vollständigkeit Gödel gezeigt hat. Ob das Gödelsche System „zahlentheoretisch hinreichend mächtig“ ist, um eine im Kalkül ableitbare Widerspruchsfreiheit verneinen zu können, kann aufgrund der vorliegenden Axiomatik nicht entschieden werden. Benötigt wird noch mehr Information über die durchaus schwierige Frage, durch welche Terme *Eigenschaften* definiert werden dürfen. Jedenfalls müssen die Definitionsmöglichkeiten mächtig genug sein, um „notwendige Existenz“ oder „Gleichheit mit sich selbst“ definieren zu können – und das könnte bereits dafür ausreichen, dass das betrachtete System „zahlentheoretisch hinreichend mächtig“ sein muss.
2. Die zweite Lücke betrifft das Modell, die *Affenwelt mit Gott*. Auch hier wäre es noch erforderlich, genauer zu sagen, welche Eigenschaften überhaupt in Betracht kommen – und dann zu untersuchen, ob das Modell noch widerspruchsfrei ist.
3. Die dritte Lücke befindet sich bei der Verbindung zur Wirklichkeit, wobei letztere jedenfalls alles physikalisch oder psychologisch Meßbare umfasst, aber auch Sachverhalte,

die nicht unmittelbar empirisch erkennbar sind, nicht ausgeschlossen werden dürfen.

4. Schließlich gibt es noch eine Lücke, die vielleicht die gravierendste ist: das Sprache-Bedeutung-Problem. Dieses ist so alt wie die Philosophie: z. B. könnte man Platos *Höhlen-gleichnis* damit in Verbindung bringen. Andererseits ist es meines Wissens erst im 20. Jahrhundert mit dem Aufkommen der Sprachphilosophie explizit thematisiert worden. Das Sprache-Bedeutung-Problem ist entscheidend für die Interpretation des ontologischen Arguments: Was bedeutet – in natürlicher Sprache – der Satz

„ein göttliches Wesen existiert“ ?

Insgesamt stellt der Gödelsche Gottesbeweis ein Stück spekulative Metaphysik dar, das in weiten Teilen die Arbeiten seiner Vorgänger an Präzision übertrifft. Allerdings zeigt die Analyse auch, dass die Existenz eines göttlichen Wesens noch von anderen Faktoren als rein logischen Argumenten abhängig ist, nämlich z. B. von psychologischen Lernprozessen, durch die einem Satz wie dem genannten eine Bedeutung im täglichen Leben zugesiesen wird oder nicht.

Nach der Analyse müsste der Gottgläubige, der die Existenz Gottes auch rational einsehen will, irgendwie begründen, warum „die Perfectiven miteinander vereinbar sind“, und warum die Rede von Gott in der natürlichen Welt sinnvoll ist.

Umgekehrt müsste der rationale Atheist darlegen, weshalb wenigstens eine der oben beschriebenen Lücken nicht schließbar ist.

## Schluss

Bevor ich den Vortrag beende, möchte ich noch eine Passage aus dem Nachlass von Kurt Gödel [6] zitieren:

*Philosophie*: Beschäftigung mit Philosophie, selbst wenn keine positiven Ergebnisse herauskommen (sondern ich ratlos bleibe), ist in jedem Fall wohltätig. Es hat die Wirkung (daß „die Farbe heller“), d. h., *daß die Realität deutlicher* als solche erscheint.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

## Literatur

- [1] Avicenna. *The Metaphysics of The Healing. A parallel English-Arabic text. Translated, introduced, and annotated by Michael E. Marmura.* Brigham Young University Press, Provo, Utah, 2005.
- [2] Joachim Bromand and Guido Kreis, editors. *Gottesbeweise von Anselm bis Gödel.* Suhrkamp, Berlin, 2011.
- [3] John W. Dawson. *Kurt Gödel: Leben und Werk.* Springer, Wien, 1999.
- [4] André Fuhrmann. Existenz und Notwendigkeit – Kurt Gödels axiomatische Theologie. In Wolfgang Spohn, Peter Schroeder-Heister, and Erik J. Olsson, editors, *Logik in der Philosophie*, pages 349–374, Heidelberg, 2005. Synchron.
- [5] Gianbruno Guerrerio. *Kurt Gödel. Logische Paradoxien und mathematische Wahrheit.* Spektrum der Wissenschaft, 2002.
- [6] Kurt Gödel. \*1970. In Solomon Fefermann, editor, *Collected Works*, volume III, pages 403–404 und 432, 1995.
- [7] Bertrand Russell. *The Autobiography of Bertrand Russell.* George Allen and Unwin Ltd, 1967.
- [8] Jordan Howard Sobel. Gödel's ontological proof. In Judith Jarvis Thomson, editor, *On Being and Saying. Essays for Richard Cartwright*, pages 241–261. The MIT Press, 1987.
- [9] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia Mathematica.* University Press, Cambridge, 1910–1913.
- [10] Wikipedia. Avicenna. (abgerufen am 05.06.2012).